PROGRAMACIÓN
DE PROYECTOS

REDES DE FLECHAS

J. Alcalá

*Departamento de Ingeniería de la Construcción
y de Proyectos de Ingeniería Civil*

Programación de Proyectos
REDES DE FLECHAS

Julián Alcalá González jualgon@upv.es

Departamento de Ingeniería de la Construcción
y de Proyectos de Ingeniería Civil
Ref.: 0023-0056-PRC-00761-0017
Documento elaborado en LaTeX

Índice

(Página intencionadamente dejada en blanco)

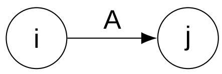
1. Introducción

La primera de las formas de representación de proyectos basadas en grafos son las redes de flechas. Esta técnica es la que inicialmente emplearon las técnicas *CPM* y *PERT*, y aunque adolece de algunos inconvenientes que la han hecho hoy en día muy poco utilizada, es la más adecuada para introducirse en la programación de proyectos por resultar mucho más didáctica.

En este texto se van a emplear los conceptos de *actividad*, *suceso* y *restricción*, y se supone que el lector los conoce.

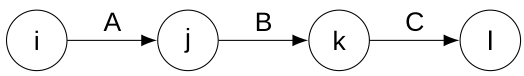
2. Forma de representación

En estas redes toda actividad (A) queda representada por una flecha cuyo origen (i) y final (j) se definen a su vez por sus correspondientes nodos (o nudos).



Estos nodos representan sucesos o eventos, correspondientes a los instantes de inicio o terminación de cada actividad.

En base a los conceptos de actividad, suceso y restricción se define como *camino* a una cadena de actividades ligadas por sucesos, en el que cada una es subordinada en una restricción *principio-fin* con la anterior. Un camino formado por 4 nudos por ejemplo tendría la siguiente representación:



Esta gráfica significa que una actividad, B, solo puede empezar cuando se haya terminado de ejecutar la actividad A, y que a su vez la finalización de B permitirá el inicio de la actividad C.

Una red puede definirse como un conjunto de caminos interrelacionados entre sí.

3. Reglas constructivas

1. En cualquier nodo de la red puede establecerse una relación de **convergencia** (**??**) o de **bifurcación** (**??**) con dos o más actividades como antecedentes o consecuentes en cada caso respectivamente, con la representación que muestran las figuras. En la primera sucede que la actividad C va precedida por las actividades A y B simultáneamente, y en la segunda, que las actividades B y C van ambas precedidas por A.

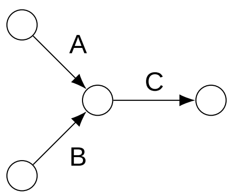


Figura 1: Relación de convergencia entre actividades.

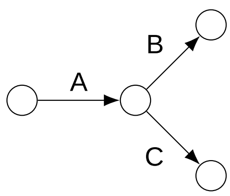


Figura 2: Relación de bifurcación entre actividades.

Pero hay casos en que la coincidencia en un nudo de una función y una bifurcación, no resulta compatible con las condiciones de precedencia dadas. Supongamos por ejemplo que estas condiciones exigen que:

- A precede a C y D
- B precede sólo a D

Para representar correctamente esta situación no sería válida la forma de la **??**. Sería válida la **??**, en la que se ha tenido que utilizar una actividad ficticia φ

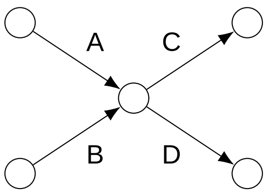


Figura 3: Red de flechas incorrecta.

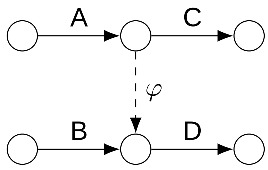


Figura 4: Red de flechas correcta.

2. Ningún suceso puede ser simultáneamente origen y final de un determinado camino. El ejemplo de la **??** no sería representativo de la realidad de una obra. No pueden existir bucles.

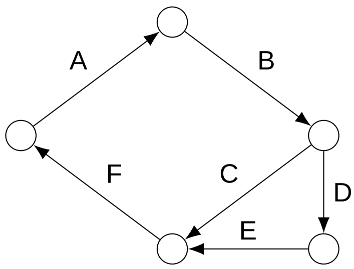


Figura 5: Red de flechas imposible.

3. Dos actividades no pueden tener el mismo origen y el mismo final. Sería incorrecta por tanto la representación de la **??** y debería sustituirse por la de la **??**.

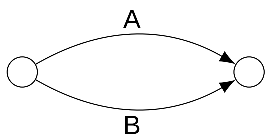


Figura 6: Red de flechas incorrecta.

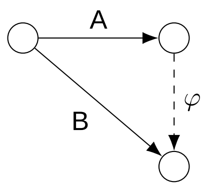


Figura 7: Red de flechas correcta.

4. La red no puede tener más de un origen ni más de un final. Sería por tanto incorrecto el grafo de la **??** cuya representación correcta sería la de la **??**.

4. Determinación de tiempos

El tiempo es lógicamente la variable primordial en la programación de una obra, de cuyo estudio se deduce la duración óptima para su ejecución. En las redes de flechas los nodos se utilizan como puntos de control asociados a fechas de llegada que servirán para identificar el *camino crítico* (ver apartado **??**).

Fechas de suceso

En cada suceso o etapa (i) de una red de flechas se consideran dos fechas clave (ver figura **??**):

- Fecha más temprana (o tiempo *early*): E_i
- Fecha más tardía (o tiempo *last*): L_i

Para cada actividad A de duración t estas fechas corresponden a los cuatro instantes posibles siguientes:

- Fecha más temprana de inicio (E_i)
- Fecha más tardía de inicio (L_i)

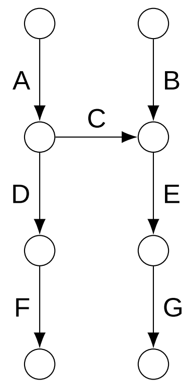


Figura 8: Red de flechas incorrecta.

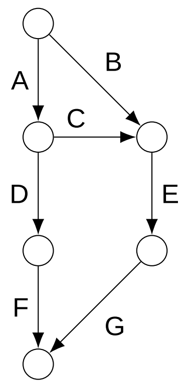


Figura 9: Red de flechas correcta.

- Fecha más temprana de terminación (E_j)
- Fecha más tardía de terminación (L_j)

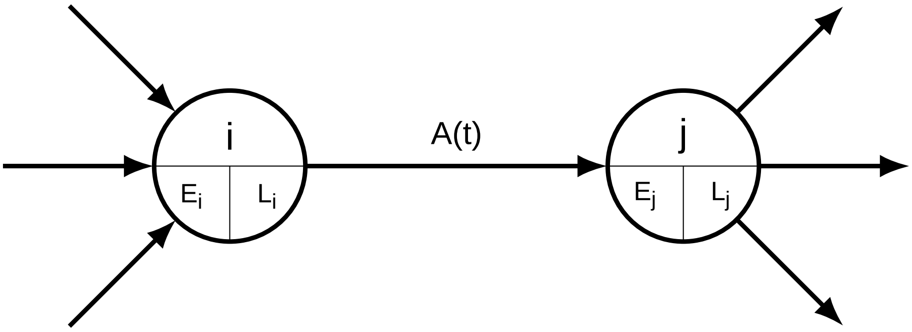


Figura 10: Representación de las fechas en una actividad.

Los intervalos definidos por estas fechas y las posiciones extremas de la actividad A en un diagrama de Gantt podría representarse de la forma que se muestra en la **??**.

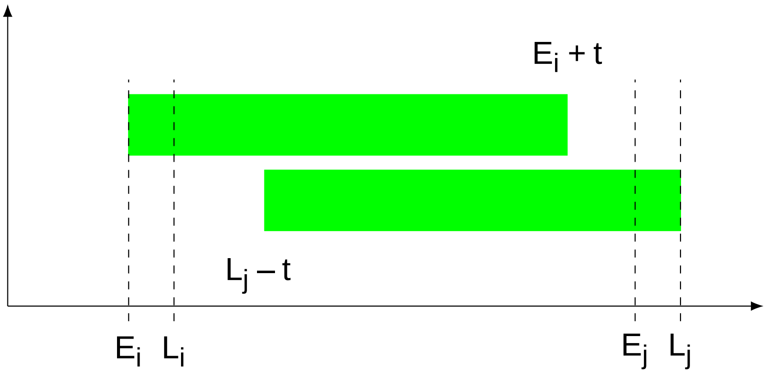


Figura 11: Representación de las fechas de una actividad en una escala temporal.

Determinación de fechas más termprana (*early*) Para la obtención de esta fecha en el nudo j aplicaremos la siguiente ecuación:

$$E_j = \mathrm{Max}(E_i + t_{ij})$$

donde, E_i representa la fecha más temprana de inicio de cualquier actividad inmediatamente anterior al nudo j considerado y t_{ij} la duración de dicha actividad.

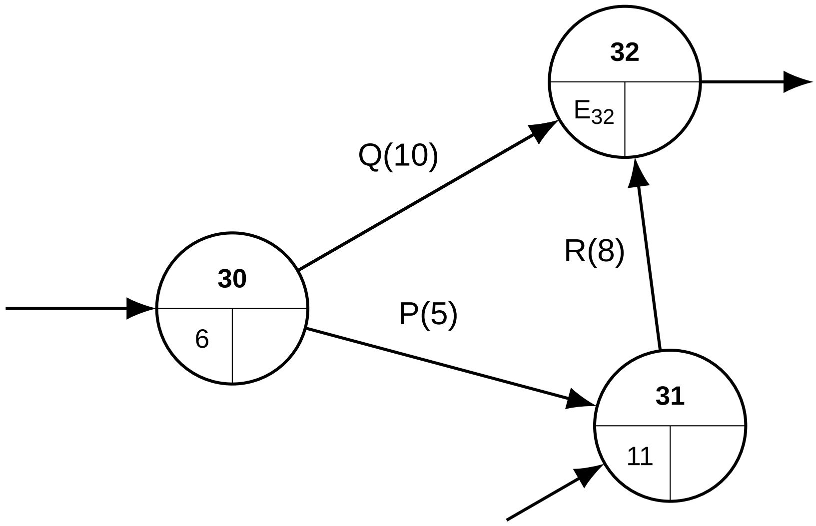


Figura 12: Ejemplo de obtención de una fecha *early*.

Supongamos por ejemplo una parte de la red de flechas definida por los nudos y datos de la **??**.

La fecha E_{32} en el nudo **32** puede tomar los valores:

- Por el camino 30 - 32: $E_{32} = 6 + 10 = 16$
- Siguiendo el camino 31 - 32: $E_{32} = 11 + 8 = 19$

Adoptando el valor máximo, tomaremos: $E_{32} = 19$.

Se observa que adoptar $E_{32} = 16$ implicaría en este caso fijar un instante en el nudo 32 demasiado temprano para poder realizar la actividad R.

La fecha más temprana E_i en el nudo final de la red indica el momento de terminación de la obra, es decir, el plazo total.

Determinación de fechas más tarde (*last*) Con un criterio inverso al anterior, las fechas más tarde se calculan con la ecuación:

$$L_i = Min(L_l + t_{ij})$$

en la cual L_j representa la fecha más tardía de terminación de cualquier actividad inmediatamente posterior al nudo i, y t_{ij} la duración de esa actividad.

Con el mismo esquema anterior y los datos de la **??** la fecha L_{30} en el nudo 30 puede ser:

- Desde el nudo 31: $L_{30} = 13 – 5 = 8$
- Desde el nudo 32: $L_{30} = 21 – 10 = 11$

Se debe adoptar por tanto el valor: $L_{30} = 8$.

El valor E_j y el valor E_i en el primer nodo y en el último coincidirán siempre. Por esa razón en la programación se obtienen los valores más tempranos primero, y después se programa desde el final para obtener los más tardíos.

4.1. Definición de tiempos disponibles

El tiempo disponible para realizar cada actividad lo determinan los nudos situados en su origen y en su final, es decir, las fechas en que se producen el inicio y la terminación de la actividad. De este modo el tiempo

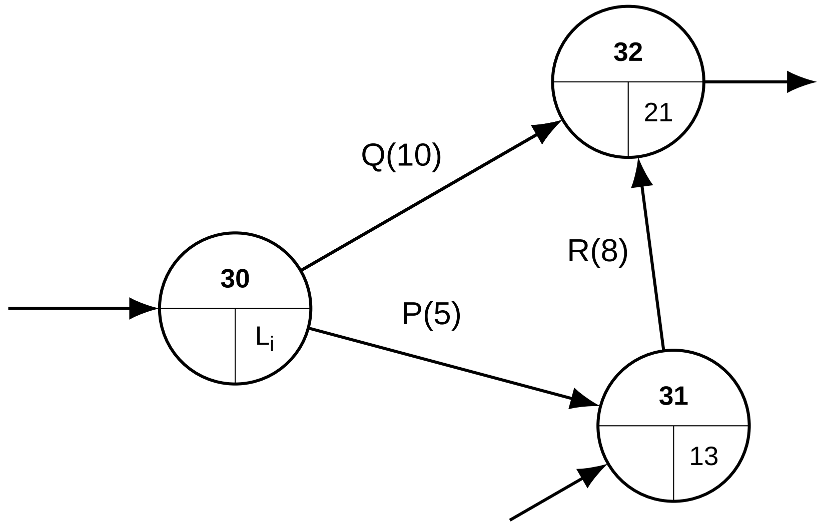


Figura 13: Ejemplo de obtención de una fecha *last*.

disponible es variable en función de estas fechas, pudiéndose definir en los límites de esta variación tres valores significativos:

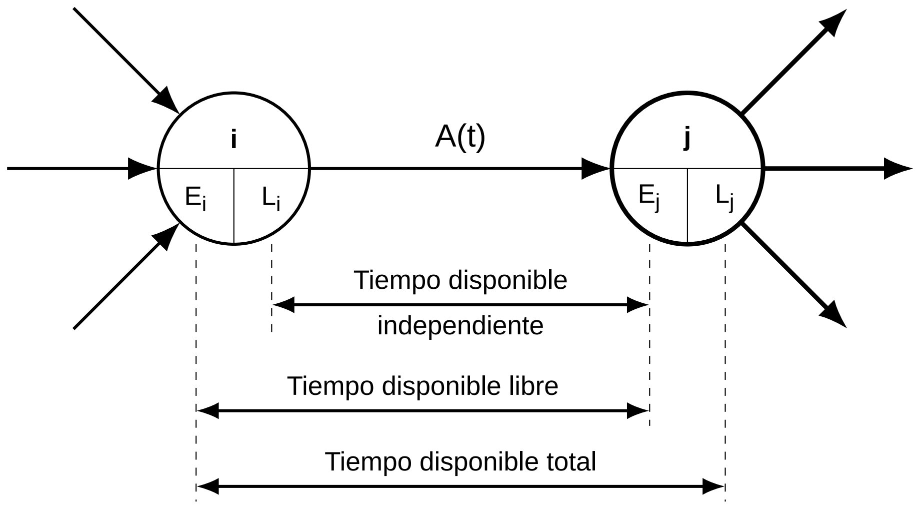


Figura 14: Tiempos disponibles para ejecutar una actividad.

Tiempo disponible total corresponde a la hipótesis de que todas las actividades anteriores al suceso origen se realicen lo más pronto posible, y todas las posteriores al suceso final lo más tarde posible.

$$TD_{totalt}(i,j) = L_j - E_i \qquad (1)$$

En esta hipótesis las condiciones de realización de la actividad A son óptimas y el valor del tiempo disponible es el máximo de todos los que se pueden tomar.

Tiempo disponible libre es el que se tiene para realizar la actividad en el supuesto de que todas las restantes, anteriores y posteriores, se lleven a cabo lo antes posible. Su expresión es por tanto:

$$TD_{libre}(i,j) = E_j - E_i \qquad (2)$$

Se llama libre porque puede disponerse libremente de él sin que su utilización tenga repercusión en el desarrollo de las actividades sucesivas.

Tiempo disponible independiente corresponde al supuesto de que todas las actividades anteriores al nudo origen, se realizan lo más tarde posible y todas las posteriores lo más pronto posible.

$$TD_{ind}(i,j) = E_j - L_i \tag{3}$$

Esta hipótesis corresponde a que la actividad A se realice en condiciones pésimas y en consecuencia el valor de este tiempo disponible es el mínimo.

4.2. Holguras y camino crítico

El concepto de holgura se emplea en los métodos basados en el *camino crítico* para describir la libertad de desplazamiento que dentro de un cierto intervalo de tiempo, puede tener un suceso o una actividad. Puede ser:

- **Holgura de suceso**, también llamado margen de etapa s_i es la diferencia entre las fechas más tarde y más pronto de ese suceso. Es decir:

  $$s_i = L_i - E_i$$

  Con los conceptos anteriores se verifica que el margen de etapa de un determinado nudo es igual a la diferencia entre los tiempos *disponible total* y *disponible libre*, de cualquier actividad que termine en dicho nudo. En efecto, si restamos las expresiones **??** y **??** se tiene:

  $$TD_{total}(i,j) - TD_{libre}(i,j) = (L_j - E_i) - (E_j - E_i) = L_j - E_j = s_j$$

  El **camino crítico** (o ruta crítica) está definido por todos los sucesos de holgura nula. Por consiguiente en las actividades que forma la ruta crítica, las fechas más tempranas y más tardía coinciden, tanto en el inicio como en la terminación de cada actividad, es decir :

  $$E_i = L_i \quad ; \quad E_j = L_j$$

  Las actividades críticas definen el conjunto de tareas que han de realizarse sin ningún retraso.

  Puede ocurrir que alguna actividad quede entre sucesos de holgura nula, pero no sea crítica. Por ejemplo, veamos la figura **??**. El camino crítico está formado por las actividades P y R, pero no por Q, que a pesar de estar entre dos sucesos de holgura nula, esta actividad tiene una holgura total de:

  $$L_{32} - E_{30} - t_{30,32} = 19 - 6 - 10 = 3.$$

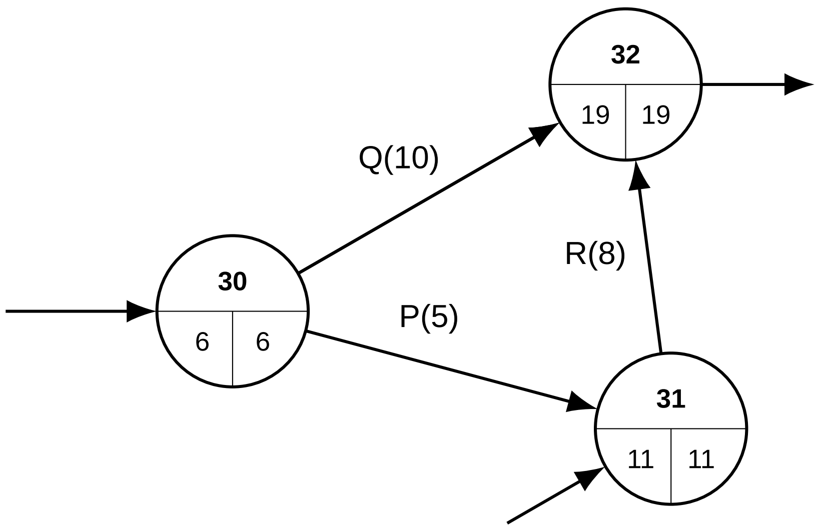


Figura 15: Ejemplo de actividad no crítica entre sucesos de holgura nula.

- **Holgura de una actividad.** La holgura o margen de una actividad se obtiene descontando su duración de su tiempo disponible. En todas las actividades críticas su holgura es nula. A partir de los tiempos disponibles antes definidos en una actividad se pueden considerar las siguientes holguras:

  - HOLGURA TOTAL (o margen de camino). Viene dada por:

$$H_{total}(i,j) = TD_{total}(i,j) - t_{ij} = L_j - E_i - t_{ij} \tag{4}$$

    Este tiempo es siempre positivo o nulo y representa el **máximo retraso con que puede realizarse una actividad sin que se produzca demora en la fecha final de terminación de la obra**.

    Esta holgura podría consumirse completamente en prolongar la duración de la actividad A, o por el contrario repartir su duración en las actividades posteriores. En el primer caso uno al menos de los caminos que parten de la actividad A, se haría crítico, de modo que los sucesos posteriores al j en ese camino tendrían que ocurrir en sus fechas más tarde.

  - HOLGURA LIBRE (o margen de actividad). Viene dada por:

$$H_{libre}(i,j) = TD_{libre}(i,j) - t_{ij} = E_j - E_i - t_{ij} \tag{5}$$

    Esta holgura es también siempre positiva y puede definirse como **el retraso máximo que puede darse en una actividad cuyos antecedentes se han realizado lo antes posible, sin que ese retraso repercuta en las actividades posteriores** (y en consecuencia, tampoco en la fecha final de la obra). Es decir, que si para realizar un actividad se consume la holgura libre, y la actividad ha sido iniciada en la fecha más temprana, las actividades que le suceden podrán todavía iniciarse en sus fechas más tempranas. Por esta razón a la holgura libre se le denomina también *margen de actividad*.

    Si a un determinado nudo, llega únicamente una actividad, la holgura libre de ésta es nula.

    Las holguras libre y total están relacionadas por la expresión:

$$H_{total}(i,j) = H_{libre}(i,j) + s_j \tag{6}$$

    y por tanto: $H_{total}(i,j) \geqslant H_{libre}(i,j)$

  - HOLGURA INDEPENDIENTE. Viene dada por:

$$H_{ind}(i,j) = TD_{ind}(i,j) - t_{ij} = E_j - L_i - t_{ij} \tag{7}$$

    Esta holgura representa el retraso que puede sufrir una actividad con su inicio demorado al máximo por las actividades precedentes, sin que ese retraso ocasione aplazamientos en el comienzo de cualquier actividad posterior (ni por tanto, tampoco en el plazo final de ejecución).

    En la práctica, la holgura (o margen) independiente no se emplea mucho, aunque puede ser útil como parámetro representativo de las condiciones más desfavorables en que puede desarrollarse una actividad.

    A diferencia de las holguras total y libre, puede ser positiva o negativa, verificándose:

$$H_{ind}(i,j) = H_{libre}(i,j) - s_i = H_{total}(i,j) - s_i + s_j \tag{8}$$

    por lo que: $H_{total}(i,j) \geqslant H_{libre}(i,j) \geqslant H_{ind}(i,j)$

  - HOLGURA INTERFERENTE. Se define como la diferencia entre las holguras total y libre de una actividad.

$$H_{inter}(i,j) = H_{total}(i,j) - H_{libre}(i,j) \tag{9}$$

    y teniendo en cuenta la **??**

$$H_{inter}(i,j) = s_j \tag{10}$$

    Suponiendo la actividad realizada en la fecha más temprana, la representación de estos tiempos, sería la siguiente:

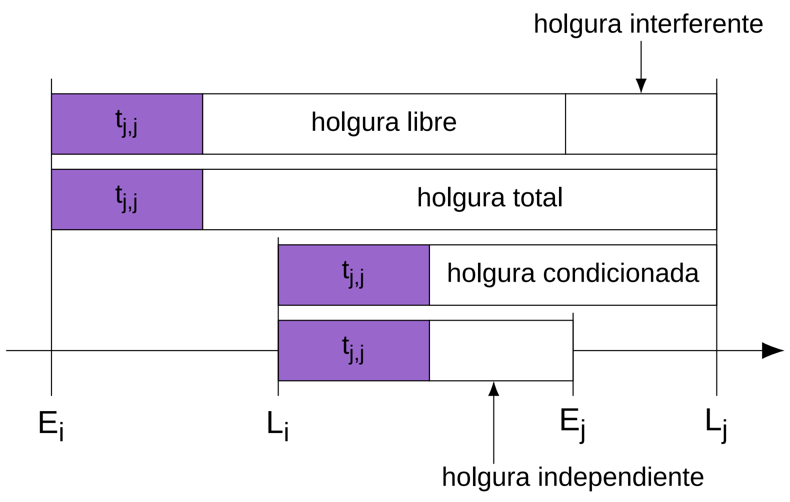


Figura 16: Representación de las holguras de una actividad en una escala temporal.

EJERCICIOS RESUELTOS

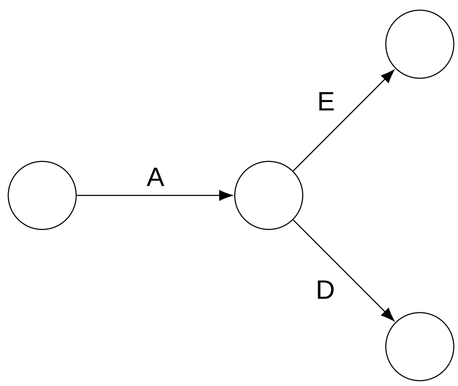
Ejercicio 1

Crear la red de flechas de un proyecto, para las precedencias que se dan en la tabla que sigue:

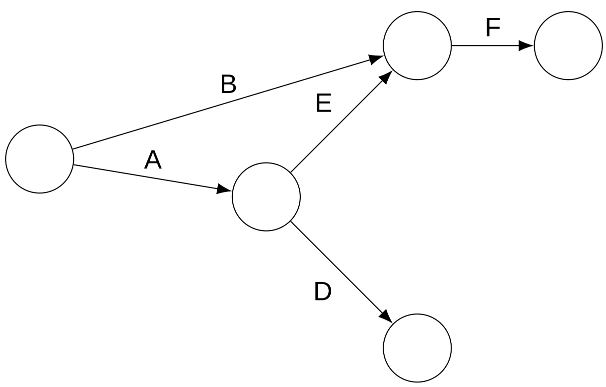
Actividad	Precedencia
A	–
B	–
C	–
D	A
E	A
F	B,E
G	B,D,E
H	B,C,D,E
I	F
J	F
K	G,H,I,J

Solución El proceso para crear la red de flechas de ese proyecto sería:

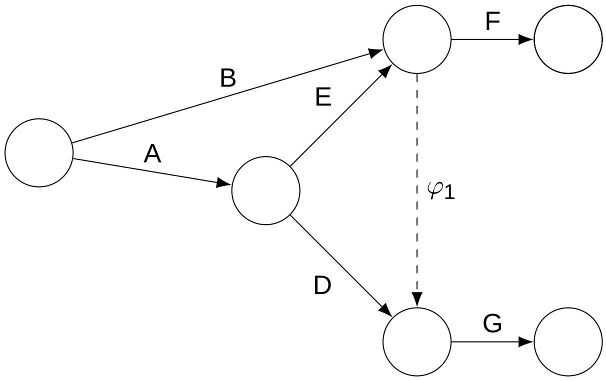
1. Con las restricciones con la actividad A se tiene:



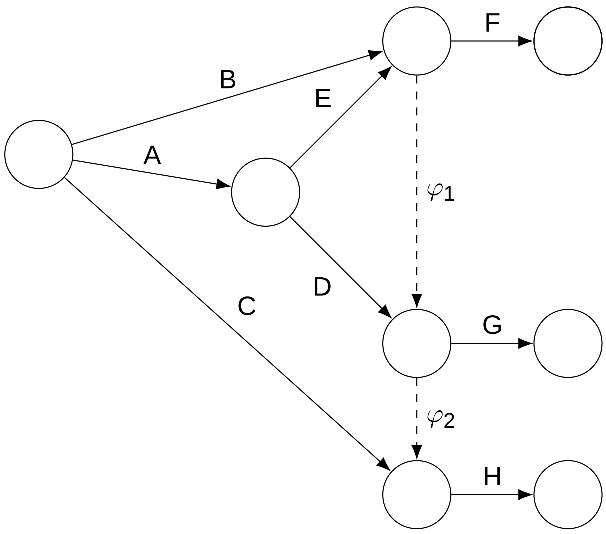
2. Con la restricción de F con la actividad B se tiene:



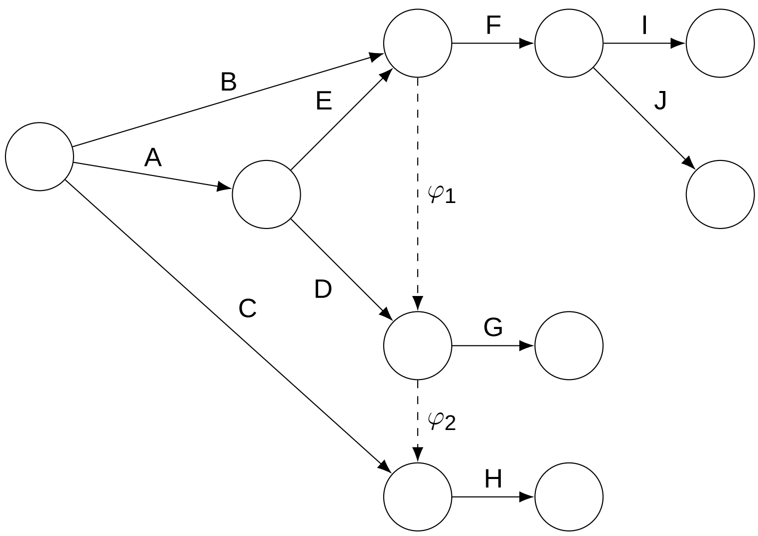
3. Para la actividad G es necesario definir una actividad ficticia φ_1:



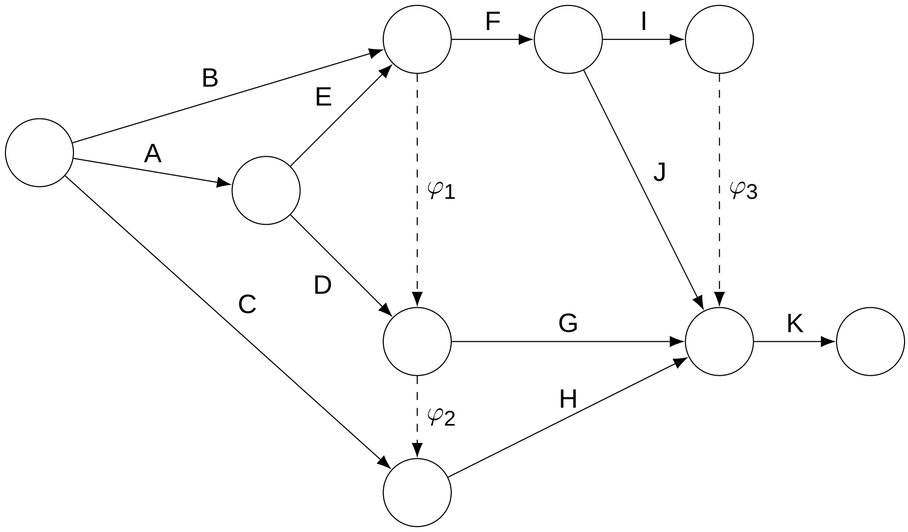
4. Para la actividad H también se necesita una actividad ficticia φ_2:



5. Las actividades I y J solo depende de J:



6. Finalmente, la actividad K requiere unir los finales de las actividades G, H y J, y añadir una nueva actividad ficticia φ_3:


B
E
A
C
D
F
I
J
G
H
K
φ_1
φ_2
φ_3

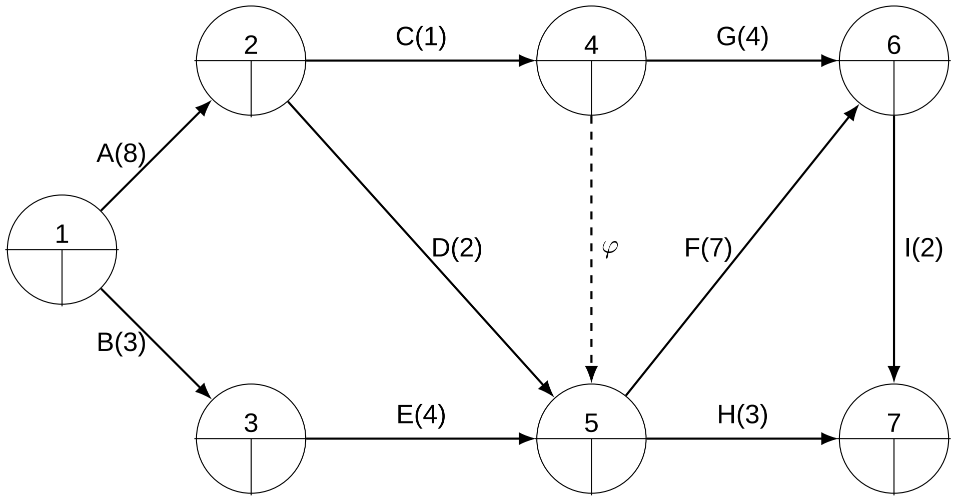
Ejercicio 2

Un proyecto viene dado por las actividades y duraciones que se indican en la tabla que sigue:

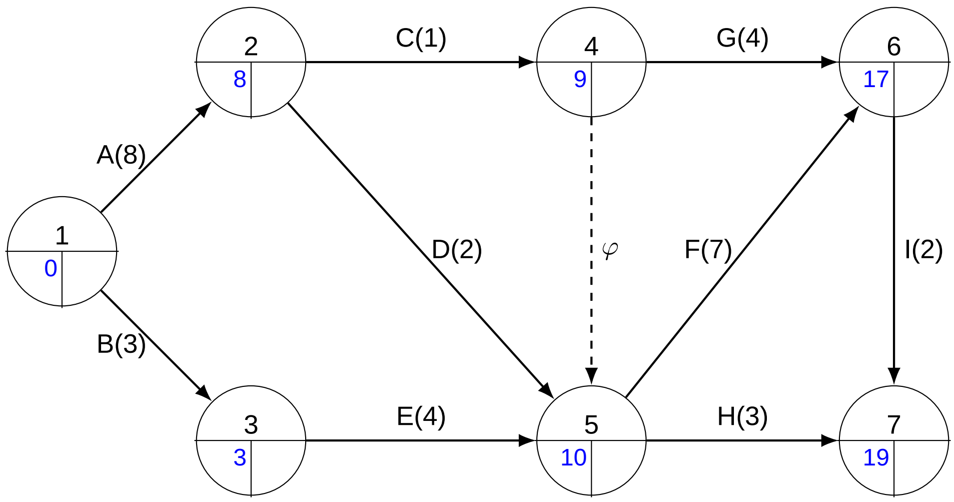
Actividad	Duración	Precedencia
A	8	–
B	3	–
C	1	A
D	2	A
E	4	B
F	7	C,D,E
G	4	C
H	3	C,D,E
I	2	G,F

Se desea conocer al camino crítico y las holguras de cada actividad.

Solución Se comienza representando el proyecto en un diagrama de flechas:



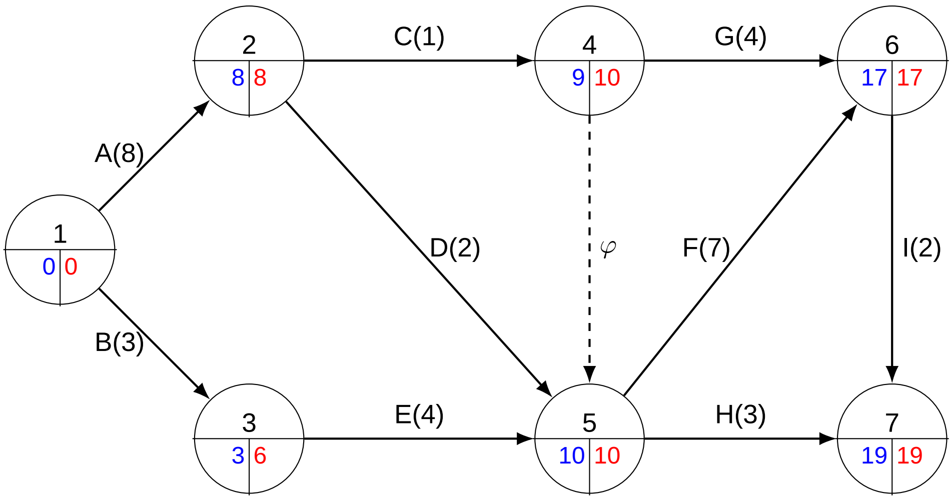
Ahora se calculan las fechas *Early* de cada nodo, tomando el mayor valor que se deduzca de las actividades que converjan a ese nodo:



Por ejemplo, veamos qué sucede en el nodo 6. La fecha que supone el final de la actividad G es la fecha *Early* del nodo inicial de G (nodo 4) más su duración: 4+4=8. El final de la actividad F es, del mismo modo: 10+7=17. Como el final de F es mayor (posterior en el tiempo), que el final de G, esa es la fecha *Early* del nodo 6.

Ya sabemos que la duración del proyecto es de 19 días.

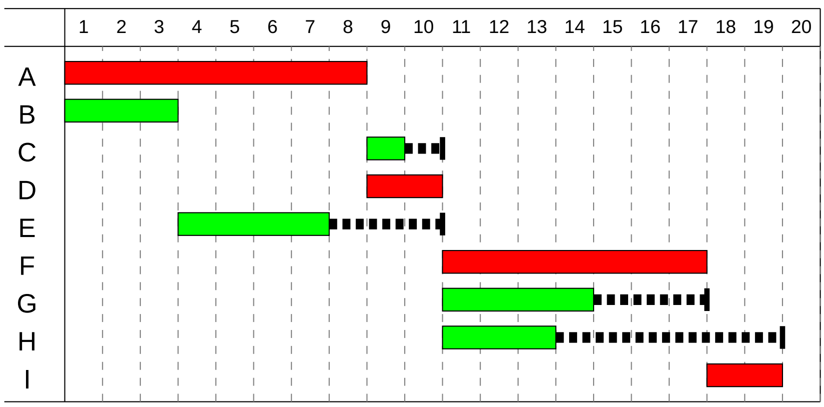
Finalmente se calculan las fechas *last* de cada actividad, tomando los valores menores que converjan a cada nodo calculando desde el final.



Por ejemplo, veamos el nodo 2. La actividad C termina como fecha más tardía el día 10, y por tanto puede comenzar el día 11 porque dura 1 día, pero la actividad D tiene que comenzar el día 8 para terminar el día 10 en el nodo 4. Por tanto, la fecha *Last* del nodo 2 es 8, y no 9, porque de otro modo se retrasaría la actividad D, y con ello todo el programa del proyecto.

Del resultado se deduce ahora que el camino crítico es: A – D – F – I. Obsérvese la actividad H. Aunque aparentemente no tiene holgura, porque las fechas *Early* y *Last* en los dos nodos extremos coinciden, sí puede alargar su duración hasta los 9 días, y no afectaría al final del proyecto.

El diagrama de Gantt de este proyecto sería:



Ejercicio 3

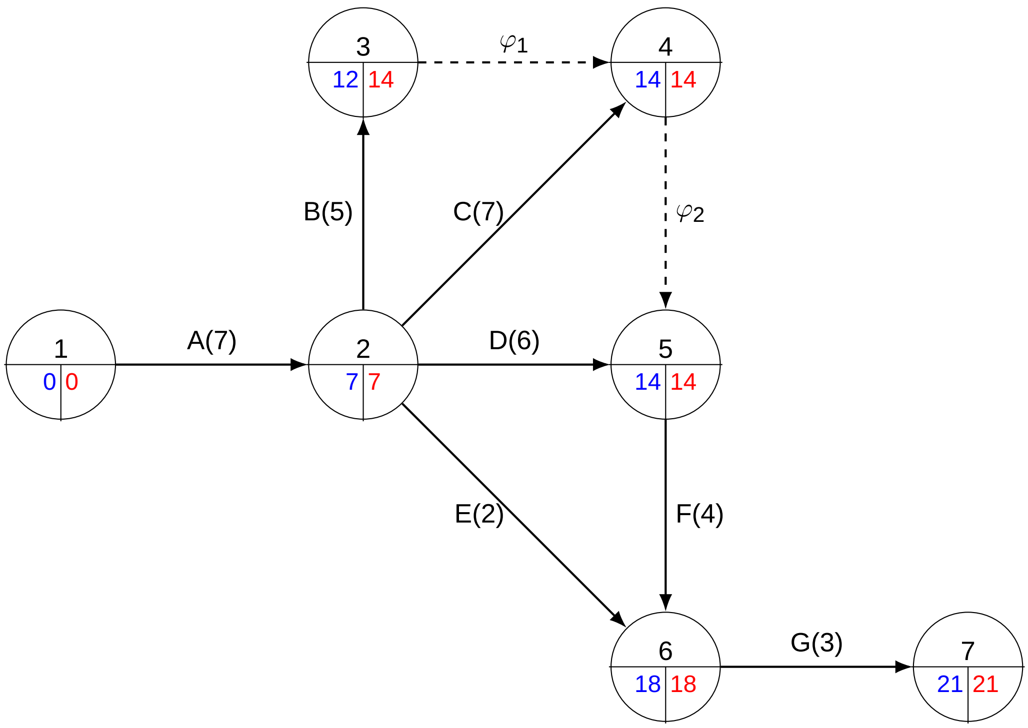
La tabla que sigue muestra las duraciones y precedencias de un proyecto:

Actividad	Duración	Precedencia
A	7	–
B	5	A
C	7	A
D	6	A
E	2	A
F	4	B,C,D
G	3	E,F

Se pide:

- Red de flechas y camino crítico.
- Holguras total, libre e interferente.
- Diagrama de Gantt. Hipótesis: realización más temprana acotando las holguras.

Solución El grafo sería el siguiente:



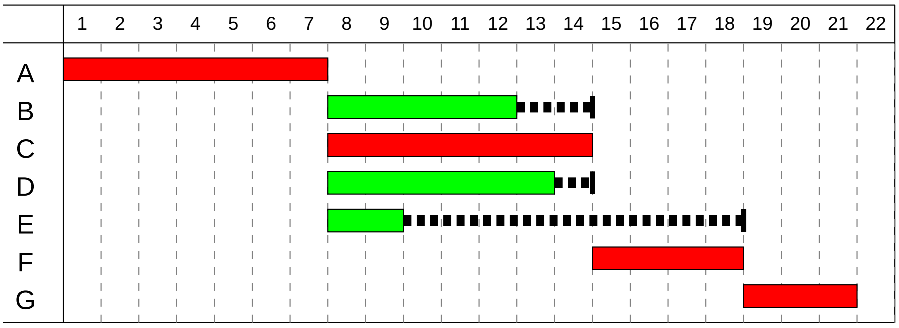
Camino crítico: A – C – F – G

Holguras:

	ACTIVIDADES						
HOLGURAS	A	B	C	D	E	F	G
Totales ($L_j - E_i - d_{ij}$)	0	2	0	1	9	0	0
Libres ($E_j - E_i - d_{ij}$)	0	2	0	1	9	0	0
Interfer. ($L_j - E_j$)	0	0	0	0	0	0	0

NOTA: La holgura de B ha de calcularse considerando como final de actividad el nudo 4. Si se toma el nudo 3 la holgura H_L = 2 sería absorbida por φ_1, cuando debiera atribuirse en realidad a la actividad B.

Y el diagrama de Gantt:



Ejercicio 4

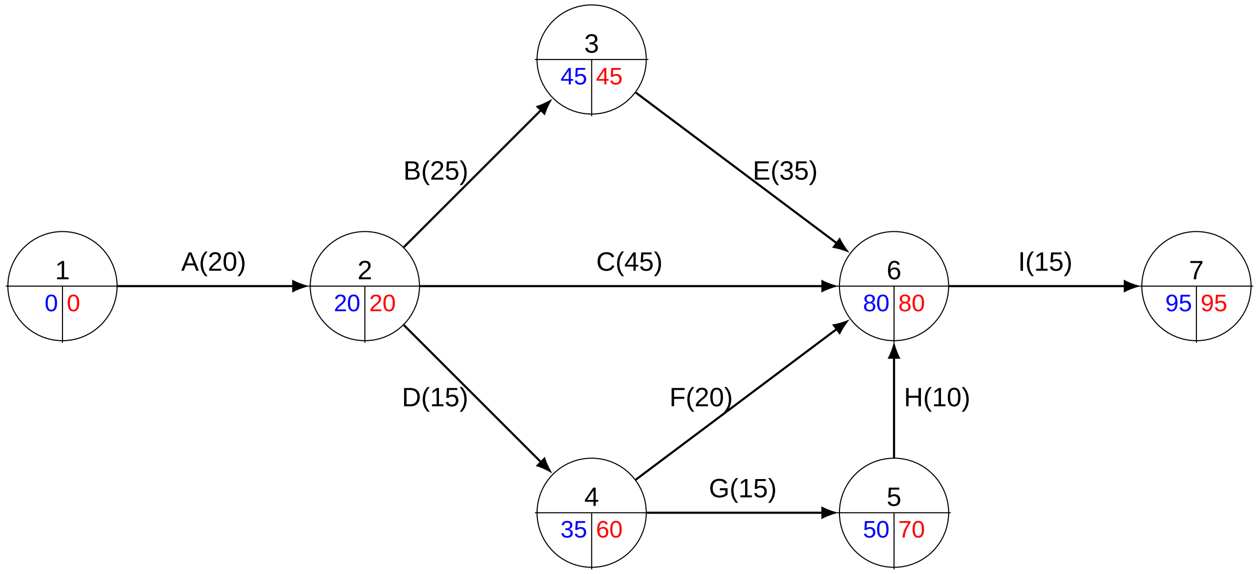
La tabla que sigue muestra las duraciones y precedencias de un proyecto:

Actividad	Duración	Precedencia
A	20	–
B	25	A
C	45	A
D	15	A
E	35	B
F	20	D
G	15	D
H	10	G
I	15	C,E,F,H

Se pide:

1. Red de flechas, camino crítico y cálculo de holguras.
2. Diagrama de Gantt acotando las holguras libres.
3. Duración mínima de la actividad *G*, para que *H* y *D* con las duraciones del enunciado sean críticas. Representar este caso en el diagrama de Gantt.

Solución Red de flechas :

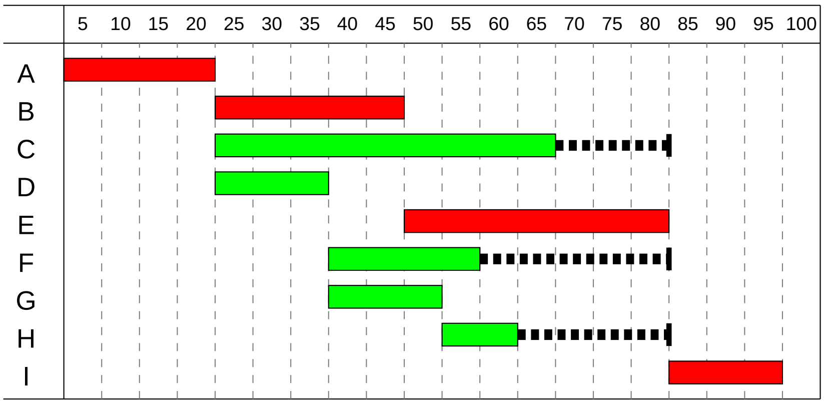


Camino Crítico: *A-B-E-I*.

Holguras: En el cuadro adjunto se obtienen a partir de las fechas E_i y L_i de cada nodo, las holguras totales, libres e interferentes de cada actividad.

	ACTIVIDADES								
HOLGURAS	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Totales ($L_j - E_i - d_{ij}$)	0	0	15	35	0	25	20	20	0
Libres ($E_j - E_i - d_{ij}$)	0	0	15	0	0	25	0	20	0
Interfer. ($L_j - E_j$)	0	0	0	25	0	0	20	0	0

Diagrama de Gantt : (en la hipótesis de ejecución más temprana, reflejando las holguras libres)



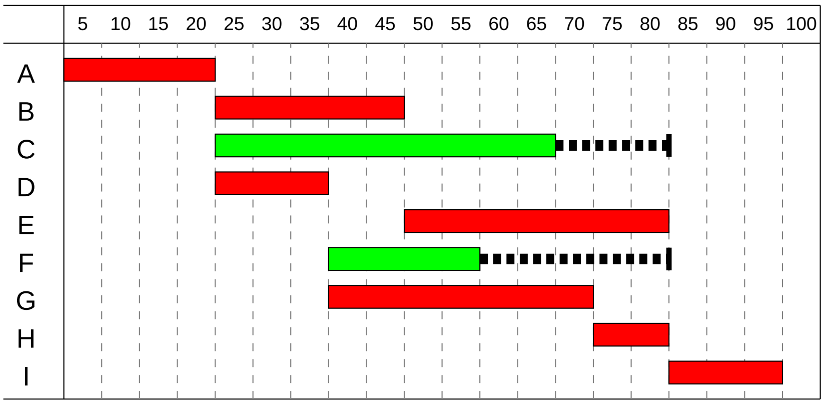
Para que H y D sean actividades críticas, el tiempo disponible total entre los nudos 2 y 6 ha de ser igual a la duración de las actividades D, G y H. Es decir:

$$L_6 - E_2 = 80 - 20 = 15 + d(G) + 10$$

$$d(G) = 35$$

Con esta duración en el nuevo diagrama de Gantt, las actividades D, G y H aparecerán sin holgura, y sólo las actividades C y F, tendrán holgura:

El nuevo diagrama de Gant será:



Referencias

[1] H. Kerzner. *Project Management: A Systems Approach to Planning, Scheduling, and Controlling*. Wiley, 2025. isbn: 9781394290031. url: https://books.google.es/books?id=JRlHEQAAQBAJ.

[2] David R. Pierce. *Project scheduling and management for construction*. eng. Fourth edition. RSMeans ; v.89. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2013. isbn: 9781118417171.

[3] Erik Leuven Demeulemeester y Willy S Herroelen. *Project scheduling*. en. International Series in Operations Research & Management Science. New York, NY: Springer, abr. de 2013.

NOTAS